10 On considère la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{n!}{3^n}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que $\frac{w_{n+1}}{w_n} \geq \frac{4}{3}$, $n \geq 3$.

2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

11 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n^2}{2^n}$, $n \geq 0$.

1. a. Placer dans un repère orthogonal les points $A_i(i, u_i)$, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

b. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{8}{9}$, $n \geq 3$.

c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. On pose $S_n = \sum_{k=3}^{n} u_k$, $n \geq 3$.

a. Montrer que $S_n \leq 9u_3$.

b. En déduire que la suite (S_n) est convergente.

12 On considère la suite (v_n) définie par $v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$.

1. Montrer que $v_n \geq \sqrt{n}$, $n \geq 1$.

2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

13 On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Etudier la convergence des suites u, v et w définies par $u_n = f\left(\frac{1}{3^n}\right)$, $v_n = f(2^n)$ et $w_n = f\left((-0.3)^n\right)$, $n \geq 0$.

14 Dans chacun des cas suivantes, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \frac{-3}{3^n - 1}$, $n \geq 1$.

2. $u_n = \frac{1}{0.8 + (0.2)^n}$, $n \geq 0$.

3. $u_n = \cos(4n) - 4^n$, $n \geq 0$.

4. $u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cos n$, $n \geq 0$.

5. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

6. $u_n = \frac{n^2 + \sin n}{n^3}$, $n \geq 1$.

7. $u_n = \frac{n + (-1)^n \sqrt{n}}{3n + 2}$, $n \geq 0$.

8. $u_n = \tan\left(-\frac{\pi n}{2n - 1}\right)$, $n \geq 0$.

15 Soit θ un réel appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2\cos\theta$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, $n \geq 1$.

1. Exprimer u_1 et u_2 en fonction de θ.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

16 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{E(\pi) + E(2\pi) + \ldots + E(n\pi)}{n^2}$, $n \geq 1$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

1. Montrer que pour $n \geq 1$, $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}$.

2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

17 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sin\left(\frac{2}{n^2}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{n}{n^2}\right)$.

On se propose d'étudier la limite de la suite (u_n).

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn